CAPÍTULO 8

RADIANES

8.1 CONCEPTOS Y DEFINICIONES

En este nivel de Preparatoria todos los alumnos saben que el valor de π es igual a 3.1416; sin embargo, ¿todos saben por qué vale eso? ¿todos saben de dónde salió ese valor?

El número *pi* es muy viejo. Se sabe que los Egipcios, los Chinos y los Babilonios ya tenían las primeras nociones de este número, aunque sin la precisión actual. Los Babilonios lo tenían como tres enteros más un octavo, es decir como 3.125; los Egipcios (2000 años A.C.) lo trabajaban como 3.160484; para los Chinos (1200 años A.C.) valía 3. Más tarde, en Grecia, Arquímedes (300 años A.C.) lo calculó como 3.14163 y Ptolomeo (200 años A.C.) lo estimó en el cociente de 377 entre 120 que es igual a 3.14166. Comenzaron a darse cuenta que si el diámetro de una circunferencia, sin importar si ésta fuera grande, mediana o chica, se colocaba sobre su propia circunferencia, cabía siempre exactamente tres veces y un pedacito más.

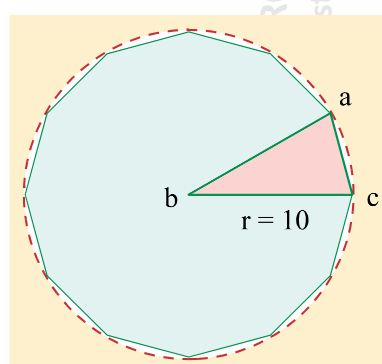

figura 8.1

Una de las formas en que los matemáticos de aquellas culturas intentaron encontrar la relación entre el perímetro de la circunferencia con su diámetro, o su radio que es la mitad, fue a base construcciones de polígonos regulares inscritos en una circunferencia. Por ejemplo, en la figura 8.1

se tiene una circunferencia de radio r = 10 y un dodecágono regular (polígono de 12 lados). Si se obtiene el perímetro del dodecágono se habrá obtenido casi el perímetro de la circunferencia.

El perímetro de este dodecágono es de 62.11657082. Se deja como ejercicio al alumno buscar el procedimiento para llegar a este resultado. Dividiendo el valor de este perímetro entre el diámetro de la circunferencia (D = 20) se obtiene que

$$\frac{62.11657082}{20} = 3.1058$$

entonces, para los hombres de aquellas culturas el valor de π era más o menos 3.1058. Sin embargo, se daban cuenta que si en vez de inscribir a la circunferencia un polígono de 12 lados inscribían uno de 24 lados (el doble del anterior), el perímetro de dicho polígono iba a ser más aproximado al perímetro de la circunferencia y, por lo tanto, el valor de π sería más exacto. Así iban cada vez aumentando de lados al polígono inscrito para obtener, a su vez, cada vez mayor aproximación a la exacta relación entre el perímetro de la circunferencia con su propio diámetro. No olvidar que actualmente podemos calcular el perímetro del dodecágono a base de las funciones trigonométricas que en aquellos siglos todavía no se descubrían.

De allí nació esta constante. Podría decirse que π representa el número de veces que todo diámetro cabe en su propia circunferencia, independientemente de la longitud de dicho diámetro Es decir, todo diámetro cabe π veces en su propia circunferencia, o lo que es lo mismo, todo radio cabe 2π veces en su propia circunferencia.

Los Egipcios, los Chinos, los Babilonios, los Griegos y en todas las culturas primitivas utilizaban dicho número sin abreviarlo, esto es, siempre lo escribían completo con todos sus dígitos. Fue hasta 1706 en que William Jones en uno de sus tratados lo abrevió como π , es decir haciendo al número $3.14159265358979323846 = \pi$.

En 1766 Lambert se dio cuenta que π debía ser un número irracional. A partir de entonces pareció establecerse una especie de competencia entre los matemáticos para ver quién podía calcular el número π con más decimales. En 1855 Richter obtuvo el valor de π con 500 decimales; posteriormente, con la aparición de las computadoras aquello se volvió una carrera más loca que práctica y en 1957 con un ordenador Pegasus se obtuvieron hasta los primeros 7840 decimales. En 1961 con una IBM 7090 se alcanzaron a obtener hasta 100 000 decimales. En 1967 con una CDC 6600 se calculó π con 500 000 decimales. En 1987 el número de decimales alcanzó hasta cien millones y en la Universidad de Tokio en 1995 se logró calcular el valor de π con 4 294 960 000 decimales de exactitud.

Si el alumno prueba con su calculadora el valor de π, ésta le mostrará en la pantalla la cantidad de 3.141592654, es decir, apenas los nueve o diez primeros decimales. Sin embargo, para efectos prácticos, antes de la aparición comercial de las calculadoras, se redondeaba este valor a 3.1416, que es en realidad como se le conoce. En la actualidad no tiene mucho sentido cuando se hace un cálculo darle a π el valor redondeado de 3.1416 (son seis teclas las que hay que oprimir) en virtud de que la calculadora lo hace completo con los nueve decimales con el simple hecho de oprimir la tecla correspondiente a π.

8.2 LAS MEDIDAS ANGULARES

Así como para medir longitudes existen diferentes unidades, por ejemplo el metro, el centímetro, la yarda, el kilómetro, etc., de la misma manera, para medir la abertura de un ángulo, existen diferentes unidades, que son: el grado sexagesimal, el radián y el grado centesimal.

El grado sexagesimal (DEG) es el más conocido, se obtiene al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales y sus múltiplos van de 60 en 60, es decir, 60 segundos hacen un minuto y 60 minutos forman un grado.

El grado centesimal (GRAD) es aquel cuyos múltiplos o submúltiplos están dados en forma centesimal y, además, un grado centesimal se obtiene de dividir en cien partes iguales un ángulo recto. Se utiliza en artillería, en topografía, en geodesia.

El radián (RAD) es el ángulo interior formado por dos radios y separados un arco de su propia circunferencia de longitud igual a un radio. Verlo en la figura 8.2.

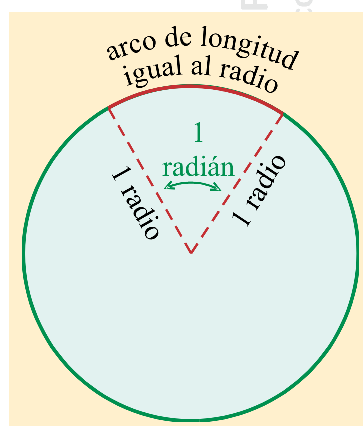

figura 8.2

Sería conveniente que en equipos de 2 alumnos hicieran la siguiente práctica:

a) En una hoja blanca tamaño carta, trazar con el compás una circunferencia de radio arbitrario, procurando que no quede demasiado pequeña y que cada circunferencia sea de tamaño diferente a la de los demás equipos.

b) Marcar con un punto y con claridad el centro de la circunferencia.

c) Trazar un radio cualquiera, es decir, una recta que vaya desde cualquier punto de la circunferencia hasta el centro.

d) Con un alambre rígido y recto, cortar un trozo que quede exactamente de la misma longitud del radio dibujado en la hoja. Si el alambre no está recto, puede fallar el ejercicio.

e) Una vez cortado un trozo de alambre de longitud igual al radio, encima del dibujo de la circunferencia antes realizado curvear al trozo de alambre hasta que tome la forma exacta de un arco de la circunferencia.

f) Colocar el alambre curveado sobre cualquier parte del dibujo de la circunferencia, vigilando que coincida perfectamente su curvatura, y marcar en el papel los puntos donde inicia y donde termina el alambre sobre la circunferencia.

g) Retirar el alambre del papel. Trazar con pluma o lápiz los dos radios que unan el centro de la circunferencia con los dos puntos marcados en el inciso anterior.

h) Con un transportador tomar la medida del ángulo que forman los dos radios dibujados en el inciso anterior.

i) En el pizarrón deberá pasar un representante de cada equipo a llenar una tabla semejante a la que se muestra:

EQUIPO	LONGITUD DEL RADIO	MEDIDA DEL ÁNGULO

EQUIPO	LONGITUD DEL RADIO	MEDIDA DEL ÁNGULO

Una vez terminado, seguramente los alumnos habrán sacado ya una conclusión, que es el objetivo de este ejercicio: La medida del ángulo, independientemente del tamaño de la circunferencia, siempre es el mismo.

¿Cuál es el valor exacto del radián, medido en grados? Se puede deducir bajo un razonamiento muy elemental. En una circunferencia hay 360 grados y en una circunferencia también caben 2π radianes, en virtud de que, por lo ya visto anteriormente, el radio cabe en su propia circunferencia 2π veces y por cada arco de longitud igual al radio se obtiene un radián.

Entonces

$$2\pi \text{ radianes} = 360 \text{ grados}$$

dividiendo la igualdad anterior entre 2π :

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{2\pi} = \frac{360 \text{ grados}}{2\pi}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{360}{2\pi} \text{ grados}$$

$$\boxed{1 \text{ radián} = 57.29577951 \text{ grados}}$$

El alumno no debe aprenderse el equivalente anterior de memoria, pues es complicado. Lo que debe aprenderse es el razonamiento anterior por medio del cual se dedujo su valor.

Cuando se quieran hacer transformaciones, ya sea de grados a radianes o bien de radianes a grados, basta formular una regla de tres a partir de lo que anteriormente ya se señaló: que en una circunferencia caben 2π radianes y también 360 grados. Es decir, 2π radianes es a 360 grados como tantos radianes son a tantos grados.

NOTA: Por la relación anterior, los radianes siempre se escriben en términos de π.

Ejemplo 1: Convertir a radianes 90 grados.

Solución: Aplicando la regla de 3 mencionada en el párrafo anterior, se puede establecer que

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{360 \text{ grados}} = \frac{x \text{ radianes}}{90 \text{ grados}}$$

$$x = \frac{2\pi(90)}{360}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, 90 grados es igual a $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejercicio con la calculadora: Obtener el seno de 90 grados y el seno de $\frac{\pi}{2}$ radianes y verificar que en ambos casos se obtiene 1 en la calculadora. Debe recordar el alumno que la calculadora tiene *modos* de operar, para lo cual existe una tecla $\boxed{\text{MODE}}$. Para que esté en *modo grados sexagesimales* debe teclear MODE hasta seleccionar DEG. Un error frecuente que comete el estudiante es poner la calculadora en *modo grad* porque en el lenguaje coloquial se dice simplemente "grados" para referirse a los grados sexagesimales. Para que esté en *modo radianes* debe teclear MODE hasta seleccionar RAD.

Ejemplo 2: Convertir a radianes 70 grados.

Solución: Aplicando la regla de 3:

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{360 \text{ grados}} = \frac{x \text{ radianes}}{70 \text{ grados}}$$

$$x = \frac{2\pi(70)}{360}$$

$$x = \frac{7\pi}{18}$$

por lo tanto, 70 grados es igual a $\frac{7\pi}{18}$ radianes.

Ejemplo 3: Convertir $\frac{5\pi}{6}$ radianes a grados.

Solución: Aplicando la regla de 3:

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{360 \text{ grados}} = \frac{\frac{5}{6}\pi \text{ radianes}}{x \text{ grados}}$$

$$x = \frac{360\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{2\pi}$$

$$x = \frac{360(5\pi)}{6(2\pi)}$$

$$x = 150 \text{ grados.}$$

por lo tanto, $\frac{5\pi}{6}$ radianes es igual a 150 grados.

Ejemplo 4: Convertir $\frac{17\pi}{36}$ radianes a grados.

Solución: Aplicando la regla de 3:

$$\frac{2\pi \text{ radianes}}{360 \text{ grados}} = \frac{\frac{17\pi}{36} \text{ radianes}}{x \text{ grados}}$$

$$x = \frac{360\left(\frac{17\pi}{36}\right)}{2\pi}$$

$$x = \frac{360\,(17\pi)}{36\,(2\pi)}$$

$$x = 85$$

así que $\frac{17\pi}{36}$ radianes es igual a 85 grados.

EJERCICIO 8.1

Convertir a radianes los siguientes ángulos dados en grados sexagesimales:

1)	95 grados	2)	200 grados	3)	250 grados
4)	15 grados	5)	330 grados	6)	240 grados
7)	180 grados	8)	30 grados	9)	45 grados
10)	210 grados	11)	270 grados	12)	320 grados

Convertir a grados sexagesimales los siguientes ángulos dados en radianes:

13)	$\frac{3\pi}{5}$ radianes	14)	$\frac{7\pi}{4}$ radianes	15)	$\frac{4\pi}{3}$ radianes
16)	$\frac{11\pi}{6}$ radianes	17)	$\frac{3\pi}{2}$ radianes	18)	$\frac{\pi}{3}$ radianes
19)	π radianes	20)	$\frac{43\pi}{36}$ radianes	21)	$\frac{17\pi}{12}$ radianes
22)	$\frac{5\pi}{18}$ radianes	23)	$\frac{\pi}{9}$ radianes	24)	$\frac{11\pi}{20}$ radianes